друг другу, или, иными словами, что движущееся твердое тело в момент времени t в геометрическом отношении вполне может быть заменено *тем же* телом, когда оно *покоится* в определенном положении.

Представим себе, что к обоим концам стержня (A и B) прикреплены часы, которые синхронны с часами покоящейся системы, т. е. показания их соответствуют «времени покоящейся системы» в тех местах, в которых эти часы как раз находятся; следовательно, эти часы «синхронны в покоящейся системе».

Представим себе далее, что у каждых часов находится движущийся с ними наблюдатель и что эти наблюдатели применяют к обоим часам установленный в § 1 критерий синхронности хода двух часов. Пусть в момент времени[1] t_A из A выходит луч света, отражается в B в момент времени t_B и возвращается назад в A в момент времени t'_A. Принимая во внимание принцип постоянства скорости света, находим

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{V - v} \quad \text{и} \quad t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V + v},$$

где r_{AB} — длина движущегося стержня, измеренная в покоящейся системе. Итак, наблюдатели, движущиеся вместе со стержнем, найдут, что часы в точках A и B не идут синхронно, в то время как наблюдатели, находящиеся в покоящейся системе, объявили бы эти часы синхронными.

Итак, мы видим, что не следует придавать *абсолютного* значения понятию одновременности. Два события, одновременные при наблюдении из одной координатной системы, уже не воспринимаются как одновременные при рассмотрении из системы, движущейся относительно данной системы.

§ 3. Теория преобразования координат и времени от покоящейся системы к системе, равномерно и прямолинейно движущейся относительно первой

Пусть в «покоящемся» пространстве даны две координатные системы, каждая с тремя взаимно-перпендикулярными осями, выходящими из одной точки. Пусть оси X обеих систем совпадают, а оси Y и Z —

[1] Здесь «время» означает «время покоящейся системы» и вместе с тем «положение стрелки движущихся часов, которые находятся в том месте, о котором идет речь».

соответственно параллельны. Пусть каждая система снабжена масштабом и некоторым числом часов, и пусть оба масштаба и все часы в обеих системах в точности одинаковы.

Пусть теперь началу координат одной из этих систем (k) сообщается (постоянная) скорость v в направлении возрастающих значений x другой, покоящейся системы (K); эта скорость передается также координатным осям, а также соответствующим масштабам и часам. Тогда каждому моменту времени t покоящейся системы (K) соответствует определенное положение осей движущейся системы, и мы из соображений симметрии вправе допустить, что движение системы k может быть таким, что оси движущейся системы в момент времени t (через t всегда будет обозначаться время покоящейся системы) будут параллельны осям покоящейся системы.

Представим себе теперь, что пространство размечено как в покоящейся системе K посредством покоящегося в ней масштаба, так и в движущейся системе k посредством движущегося с ней масштаба, и что, таким образом, получены координаты x, y, z и соответственно ξ, η, ζ. Пусть посредством покоящихся часов, находящихся в покоящейся системе, и с помощью световых сигналов указанным в § 1 способом определяется время t покоящейся системы для всех тех точек последней, в которых находятся часы. Пусть далее таким же образом определяется время τ движущейся системы для всех точек этой системы, в которых находятся покоящиеся относительно последней часы, указанным в § 1 способом световых сигналов между точками, в которых эти часы находятся.

Каждому набору значений x, y, z, t, которые полностью определяют место и время событий в покоящейся системе, соответствует набор значений ξ, η, ζ, τ, устанавливающий это событие в системе k, и теперь необходимо найти систему уравнений, связывающих эти величины.

Прежде всего ясно, что эти уравнения должны быть *линейными* в силу свойства однородности, которое мы приписываем пространству и времени.

Если мы положим $x' = x - vt$, то ясно, что точке, покоящейся в системе k, будет принадлежать определенный, независимый от времени набор значений x', y, z. Сначала мы определим τ как функцию от x', y, z, t. Для этой цели мы должны выразить с помощью некоторых соотношений, что τ по своему смыслу есть не что иное, как совокупность показаний покоящихся в системе k часов, которые в соответствии с изложенным в § 1 правилом идут синхронно.

Пусть из начала координат системы k в момент времени τ_0 посылается луч света вдоль оси X в точку x' и отражается оттуда в момент времени τ_1 назад, в начало координат, куда он приходит в момент времени τ_2; тогда должно существовать соотношение

$$\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1,$$

или, выписывая аргументы функции τ и применяя принцип постоянства скорости света в покоящейся системе, имеем

$$\frac{1}{2}\left[\tau_0(0,0,0,t) + \tau_2\left(0,0,0,\left\{t + \frac{x'}{V-v} + \frac{x'}{V+v}\right\}\right)\right] = \\ = \tau_1\left(x',\, 0,\, 0,\, t + \frac{x'}{V-v}\right).$$

Если x' взять бесконечно малым, то отсюда следует:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{V-v} + \frac{1}{V+v}\right)\frac{\partial\tau}{\partial t} = \frac{\partial\tau}{\partial x'} + \frac{1}{V-v}\frac{\partial\tau}{\partial t},$$

или

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'} + \frac{v}{V^2 - v^2}\frac{\partial\tau}{\partial t} = 0.$$

Необходимо заметить, что мы могли бы вместо начала координат выбрать всякую другую точку в качестве отправной точки луча света, и поэтому только что полученное уравнение справедливо для всех значений x', y, z.

Если принять во внимание, что свет вдоль осей Y и Z при наблюдении из покоящейся системы всегда распространяется со скоростью $\sqrt{V^2 - v^2}$, то аналогичное рассуждение, примененное к этим осям, дает

$$\frac{\partial\tau}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\tau}{\partial z} = 0.$$

Так как τ — *линейная* функция, то из этих уравнений следует

$$\tau = a\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}x'\right),$$

где a — неизвестная пока функция $\varphi(v)$ и ради краткости принято, что в начале координат системы k при $\tau = 0$ также и $t = 0$.

Пользуясь этим результатом, легко найти величины ξ, η, ζ. С этой целью (как этого требует принцип постоянства скорости света в сочетании с принципом относительности) нужно с помощью уравнений выразить то обстоятельство, что свет при измерении в движущейся системе также распространяется со скоростью V. Для луча света, вышедшего в момент времени $\tau = 0$ в направлении возрастающих ξ, имеем

$$\xi = V\tau,$$

или

$$\xi = aV\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}x'\right).$$

Но относительно начала координат системы k луч света при измерении, произведенном в покоящейся системе, движется со скоростью $V - v$, вследствие чего

$$\frac{x'}{V - v} = t.$$

Подставив это значение t в уравнение для ξ, получим

$$\xi = a\frac{V^2}{V^2 - v^2}x'.$$

Рассматривая лучи, движущиеся вдоль двух других осей, находим

$$\eta = V\tau = aV\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}x'\right),$$

причем

$$\frac{y}{\sqrt{V^2 - v^2}} = t, \quad x' = 0;$$

следовательно,

$$\eta = a\frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}}y \quad \text{и} \quad \zeta = a\frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}}z.$$

Подставляя вместо x' его значение, получаем

$$\begin{aligned}
\tau &= \varphi(v)\,\beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right),\\
\xi &= \varphi(v)\,\beta(x - vt),\\
\eta &= \varphi(v)\,y,\\
\zeta &= \varphi(v)\,z,
\end{aligned}$$

где

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-(v/V)^2}},$$

а φ — неизвестная пока функция от v.

Если не делать никаких предположений о начальном положении движущейся системы и о нулевой точке переменной τ, то к правым частям этих уравнений необходимо приписать по одной аддитивной постоянной.

Теперь мы должны показать, что каждый луч света — при измерении в движущейся системе — распространяется со скоростью V, если это утверждение, согласно нашему допущению, справедливо в покоящейся системе; мы еще не доказали, что принцип постоянства скорости света совместим с принципом относительности.

Пусть в момент времени $t = \tau = 0$ из общего в этот момент для обеих систем начала координат посылается сферическая волна, которая распространяется в системе K со скоростью V. Если (x, y, z) есть точка, в которую приходит эта волна, то мы имеем

$$x^2 + y^2 + z^2 = V^2 t^2.$$

Преобразуем это уравнение с помощью записанных выше формул преобразования; тогда получим

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = V^2 \tau^2.$$

Итак, рассматриваемая волна, наблюдаемая в движущейся системе, также является шаровой волной, распространяющейся со скоростью V. Тем самым доказано, что наши два основных принципа совместимы.

Выведенные формулы преобразования содержат неизвестную функцию φ от v, которую мы теперь определим.

Для этой цели вводим еще одну, третью координатную систему K', которая относительно системы k совершает поступательное движение параллельно оси Ξ таким образом, что ее начало координат движется со скоростью $-v$ по оси Ξ. Пусть в момент времени $t = 0$ все три начала координат совпадают, и пусть при $t = x = y = z = 0$ время t' в системе K' равно 0. Пусть x', y', z' суть координаты, измеренные в системе K'. После двукратного применения наших формул преобразования получаем

$$\begin{aligned}
t' &= \varphi(-v)\beta(-v)\left\{\tau + \frac{v}{V^2}\xi\right\} = \varphi(v)\varphi(-v)t,\\
x' &= \varphi(-v)\beta(-v)\{\xi + v\tau\} = \varphi(v)\varphi(-v)x,\\
y' &= \varphi(-v)\eta = \varphi(v)\varphi(-v)y,\\
z' &= \varphi(-v)\zeta = \varphi(v)\varphi(-v)z.
\end{aligned}$$

Так как соотношения между x', y', z' и x, y, z не содержат времени t, то системы K и K' находятся в покое относительно друг друга, и ясно, что преобразование из K в K' должно быть тождественным преобразованием. Следовательно,

$$\varphi(v)\varphi(-v) = 1.$$

Выясним теперь физический смысл функции $\varphi(v)$. Для этого рассмотрим ту часть оси H системы k, которая лежит между точками $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ и $\xi = 0$, $\eta = l$, $\zeta = 0$. Эта часть оси H представляет собой стержень, движущийся перпендикулярно своей оси со скоростью v относительно системы K. Концы этого стержня в системе K имеют следующие координаты:

$$x_1 = vt, \quad y_1 = \frac{l}{\varphi(v)}, \quad z_1 = 0$$

и

$$x_2 = vt, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = 0.$$

Таким образом, длина стержня, измеренная в системе K, равна $l/\varphi(v)$; тем самым выяснен и физический смысл функции $\varphi(v)$. В самом деле, из соображений симметрии теперь ясно, что измеренная в покоящейся системе длина некоторого стержня, движущегося перпендикулярно своей оси, может зависеть только от величины скорости, но не от ее направления и знака. Следовательно, длина движущегося стержня, измеренная в покоящейся системе, не изменяется, если v заменить через $-v$. Отсюда следует:

$$\frac{l}{\varphi(v)} = \frac{l}{\varphi(-v)},$$

или

$$\varphi(v) = \varphi(-v).$$

Из этого и найденного ранее соотношений следует, что $\varphi(v) = 1$, так что найденные формулы преобразования переходят в следующие:

$$\tau = \beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right), \quad \xi = \beta(x - vt), \quad \eta = y, \quad \zeta = z,$$

где

$$\beta = 1/\sqrt{1 - (v/V)^2}.$$